CONSIDÉRATIONS
SUR LE
PROBLEME DES TROIS CORPS. (*)

PAR MR. L. EULER.

1.

Le probleme où il s'agit de déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, ſelon l'hypotheſe Newtonienne, eſt devenu depuis quelque tems ſi fameux par les ſoins que les plus grands Géometres y ont employés, qu'on a déjà commencé à diſputer, à qui la gloire de l'avoir le premier réſolu appartenoit. Mais cette diſpute eſt fort prématurée, & il s'en faut bien encore qu'on ſoit parvenu à une ſolution parfaite du probleme. Tout ce qu'on y a fait juſqu'ici eſt reſtreint à un cas très particulier, où le mouvement de chacun des trois corps ſuit à peu près les regles établies par *Kepler*; & dans ce cas même on s'eſt borné à déterminer le mouvement par approximation. Dans tous les autres cas, on ne ſauroit ſe vanter qu'on puiſſe aſſigner ſeulement à peu près le mouvement des trois corps, lequel demeure encore pour nous un auſſi grand myſtere, que ſi l'on n'avoit jamais penſé à ce probleme.

2. Pour prouver clairement combien on eſt encore éloigné d'une ſolution complette de ce probleme, on n'a qu'à le comparer avec le cas où il n'y a que deux corps qui s'attirent mutuellement, & même avec le cas le plus ſimple, où il s'agit de déterminer le mouvement d'un corps peſant projetté d'une maniere quelconque dans le vuide. Et on conviendra aiſément qu'il auroit été impoſſible de trouver

(*) Lû le 4. Déc. 1765.

ver la parabole qu'un tel corps décrit, sans avoir connu préalablement la loi suivant laquelle un corps pesant tombe perpendiculairement en bas. Sans la découverte de Galilée, que la vitesse d'un tel corps tombant croît en raison de la racine quarrée de la hauteur, on ne seroit certainement jamais arrivé à la connoissance de la parabole qu'un corps jetté obliquement décrit dans le vuide.

3. Il en est de même du mouvement de deux corps en général qui s'attirent mutuellement, où il faut aussi commencer par déterminer le mouvement rectiligne dont ces corps s'approchent ou s'éloignent l'un de l'autre, avant qu'on puisse entreprendre de chercher les sections coniques que ces corps décriront étant jettés obliquement. Car, quoique le grand *Newton* ait suivi un ordre renversé dans ses recherches, personne ne sauroit douter qu'il n'eût jamais réussi à déterminer le mouvement curviligne, sans avoir été en état de déterminer le rectiligne.

4. De là je tire cette conséquence incontestable, qu'on ne sauroit espérer de résoudre le probleme des trois corps en général, à moins qu'on n'ait trouvé moyen de résoudre le cas où les trois corps se meuvent sur une ligne droite; ce qui arrive lorsqu'ils ont été disposés au commencement sur une ligne droite, & qu'ils y ont été, ou en repos, ou poussés selon la même direction. Donc, avant que d'entreprendre la solution du probleme des trois corps, tel qu'il est communément proposé, il est indispensablement nécessaire de s'appliquer au cas où le mouvement de tous les trois corps se fait sur la même ligne droite; & on peut bien être assuré que, tant que ce dernier probleme se refusera à nos recherches, on se flattera en vain de réussir dans la solution du premier. Dans des recherches si difficiles, il convient toujours de commencer par les cas les plus simples.

5. Or le cas où les trois corps se meuvent sur une même ligne droite, est sans contredit beaucoup plus simple que si ces corps décrivoient des lignes courbes, où il pourroit même arriver que ces

 cour-

courbes ne ſe trouvaſſent point dans un même plan; ces circonſtances doivent néceſſairement rendre nos recherches beaucoup plus compliquées. Cela eſt ſi évident, qu'on ſera bien ſurpris qu'aucun des grands Géometres qui ſe ſont occupés de ce probleme, n'ait commencé ſes recherches par le cas du mouvement rectiligne; mais la raiſon en eſt ſans doute, qu'un tel mouvement ne ſe trouve point au monde, & que ces grands hommes ſe ſont un peu hâtés d'appliquer le réſultat de leurs travaux aux mouvemens réels du Ciel, ſans vouloir entreprendre des recherches qui n'y auroient point un rapport immédiat.

6. Peut-être ſera-t-on même tenté de croire que ce cas, à cauſe de ſa ſimplicité, a été trop au deſſous des forces de ces Géometres, & qu'ils en ont voulu laiſſer le développement à des génies moins élevés: mais ce ſentiment ſeroit bien mal fondé, puiſque la ſolution de ce cas eſt aſſujettie à de ſi grandes difficultés, qu'elles ſemblent n'avoir pû encore être ſurmontées par les plus grands Analyſtes. Il me paroit donc très important de mettre devant les yeux toutes ces difficultés, afin que ceux qui voudront encore s'occuper du grand probleme des trois corps puiſſent réunir leurs forces pour les ſurmonter, s'il eſt poſſible. Ces efforts ſeront d'autant plus utiles, qu'on ne ſauroit eſpérer de parvenir jamais à une ſolution parfaite de ce probleme, à moins qu'on n'ait auparavant trouvé moyen de vaincre toutes les difficultés dont le cas du mouvement rectiligne eſt enveloppé; & encore alors peut-être ne ſera-t-on pas fort avancé à l'égard du probleme général.

Du mouvement rectiligne de trois corps.

Pl. VIII. Fig. 1.

7. Que les trois corps ſe meuvent donc ſur la ligne droite EF, & qu'ils ſe trouvent à préſent aux points A, B, C, les lettres A, B, C, étant priſes en même tems pour marquer leurs maſſes reſpectives. Donc, poſant les diſtances $AB = x$, & $BC = y$, le corps A ſera pouſſé vers F par les forces accélératrices $\frac{B}{xx} + \frac{C}{(x+y)^2}$, le corps B ſera pouſſé en même ſens vers F par la force accélératrice

trice $= \frac{C}{yy} - \frac{A}{xx}$, & le corps C vers E par la force $= \frac{B}{yy} + \frac{A}{(x+y)^2}$. Confidérons le corps B comme en repos, ou bien cherchons le mouvement refpectif des deux autres A & C par rapport à celui-ci; & puifqu'il faut tranfporter en fens contraire les forces qui agiffent fur B, aux deux autres, le corps A fera pouffé vers B par la force $= \frac{A+B}{xx} - \frac{C}{yy} + \frac{C}{(x+y)^2}$, & le corps C vers B par la force $= \frac{B+C}{yy} - \frac{A}{xx} + \frac{A}{(x+y)^2}$.

8. Suppofons maintenant l'élément du tems $= dt$, en le prenant conftant, & les principes de mécanique nous fourniffent d'abord ces deux équations:

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{dt^2} = -\frac{A-B}{xx} + \frac{C}{yy} - \frac{C}{(x+y)^3}$$

$$\text{II.}\quad \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{B-C}{yy} + \frac{A}{xx} - \frac{A}{(x+y)^2}$$

où je ne m'embarraffe point du coëfficient qu'il faudroit donner à l'élément dt, qui dépend de la maniere dont on veut exprimer le tems. C'eft donc uniquement de la réfolution de ces deux équations différentielles du fecond degré que dépend la détermination du mouvement des corps A & C, par rapport au corps B; de forte que le probleme eft réduit à une queftion purement analytique.

9. Avant que d'entreprendre la réfolution de ces équations, je remarque qu'il y a un cas où toutes les difficultés s'évanouiffent; car il eft aifé de voir qu'un cas feroit poffible où les diftances x & y conferveroient toujours le même rapport entr'elles. Pour trouver ce cas, pofons $y = nx$, & nous aurons *Cas particulier.*

$$-n(A+B)+\frac{C}{n}-\frac{Cn}{(1+n)^2}=\frac{-B-C}{nn}+A-\frac{A}{(n+1)^2},$$

ou bien

$$n^3(nn+3n+3)\ A+(n^5+2n^4+n^3-nn-2n-1)\ B-(3nn+3n+1)\ C=0,$$

d'où il eſt aiſé de trouver entre les maſſes A, B, C, le juſte rapport, le nombre n étant donné, pour que ce cas puiſſe avoir lieu. Mais, ſi les maſſes ſont données, pour trouver le nombre n il faut réſoudre cette équation du cinquieme degré:

$$(A+B)n^5+(3A+2B)n^4+(3A+B)n^3-(B+3C)nn-(2B+3C)n-B-C=0,$$

& alors, poſant $A+B-\frac{C}{nn}+\frac{C}{(1+n)^2}=E$, on aura pour le mouvement $\frac{dx^2}{2dt^2}=E\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)$ & $dt\sqrt{2E}=\frac{-dx\sqrt{ax}}{\sqrt{(a-x)}}$.

10. Ayant donc trouvé la juſte valeur du nombre n, de ſorte qu'on ait toujours $y=nx$, ce cas aura lieu quand au commencement les diſtances BA & BC auront été comme 1 à n, & que les viteſſes imprimées alors vers B auront eu le même rapport. Alors le mouvement du corps A vers B ſera le même que celui d'un corpuſcule infiniment petit vers un corps dont la maſſe ſeroit $=E$; & pour mieux déterminer ce mouvement, on n'a qu'à mettre $x=a\ \mathrm{cof}\ \Phi^2$, pour avoir $dt\sqrt{2E}=2a^{\frac{3}{2}}d\Phi\ \mathrm{cof}\ \Phi^2$, & partant $t\sqrt{2E}=a^{\frac{3}{2}}(\Phi+\mathrm{fin}\ \Phi\ \mathrm{cof}\ \Phi)$, où a marque la diſtance AB au commencement, lorſqu'il étoit $t=0$ & $\Phi=0$, en ſuppoſant que le corps A s'eſt trouvé alors en repos. Il arrivera donc juſqu'en B, faiſant $\Phi=90^\circ=\frac{\pi}{2}$, après le tems t déterminé par cette égalité: $t\sqrt{2E}=$

$a^{\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{2}$. Cette maniere de représenter le mouvement, en y introduisant des arcs de cercle, semble être la plus propre à ce dessein.

11. Mais retournons à nos deux équations générales du §. 8, & je remarque qu'on en peut former une troisieme équation, qui admette l'intégration. Pour cet effet, multiplions la premiere par $\alpha\, dx + \beta\, dy$ & l'autre par $\beta\, dx + \gamma\, dy$, & leur somme sera:

$$\frac{\alpha\, dx\, ddx + \beta\, dy\, ddx + \beta\, dx\, ddy + \gamma\, dy\, ddy}{dt^2} =$$

$$- \frac{\alpha(A + C)\, dx}{xx} + \frac{\alpha C\, dx}{yy} - \frac{\alpha C\, dx - \beta C\, dy}{(x + y)^2}$$
$$- \frac{\beta(A + B)\, dy}{xx} + \frac{\beta C\, dy}{yy} - \frac{\beta A\, dx - \gamma A\, dy}{(x + y)^2}$$
$$+ \frac{\beta A\, dx}{xx} \qquad - \frac{\beta(B + C)\, dx}{yy}$$
$$+ \frac{\gamma A\, dy}{xx} \qquad - \frac{\gamma(B + C)\, dy}{yy}$$

dont le premier membre est intégrable, son intégrale étant

$$\frac{\alpha\, dx^2 + 2\beta\, dx\, dy + \gamma\, dy^2}{2\, dt^2}.$$

12. Pour rendre aussi intégrable l'autre membre, faisons

$$\gamma A = \beta(A + B);\ \alpha C = \beta(B + C)\ \&\ \alpha C + \beta A = \beta C + \gamma A,$$

dont la derniere égalité est déjà renfermée dans les deux précédentes: prenant donc $\beta = AC$, nous aurons $\gamma = C(A + B)$ & $\alpha = A(B + C)$, & l'intégrale de l'autre membre se trouvera:

$$\frac{\alpha(A + B) - \beta A}{x} + \frac{\gamma(B + C) - \beta C}{y} + \frac{\alpha C + \beta A}{x + y},$$

puis,

puis, ſubſtituant pour α, β, γ, les valeurs trouvées ſe changent en cette forme:

$$\frac{AB(A+B+C)}{x} + \frac{BC(A+B+C)}{y} + \frac{AC(A+B+C)}{x+y},$$

& partant notre équation intégrale ſera:

$$\frac{A(B+C)dx^2 + 2ACdxdy + C(A+B)dy^2}{2dt^2} = (A+B+C)\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right),$$

où Γ eſt la quantité conſtante, introduite par l'intégration.

13. Si, d'une maniere ſemblable, nous pouvions trouver encore une autre équation intégrale, on n'auroit alors qu'à en éliminer l'élément dt, pour avoir une équation différentielle du premier degré entre les deux variables x & y; & on feroit certainement bien avancé dans la ſolution de ce probleme, quand même cette équation feroit encore aſſujettie à de très grandes difficultés. Mais il y a peu d'eſpérance de parvenir ſeulement à ce point; au moins toutes les peines que je me ſuis données pour découvrir encore une autre combinaiſon, qui conduisît à une équation intégrable, ont été inutiles. Je ne vois donc pas d'autre route que d'éliminer dans les équations différentielles du ſecond degré l'élément dt^2, par le moyen de ſa valeur trouvée ici:

$$\frac{1}{dt^2} = \frac{2(A+B+C)\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right)}{A(B+C)dx^2 + 2ACdxdy + C(A+B)dy^2}.$$

14. Mais il faut bien remarquer qu'il n'eſt pas permis de ſubſtituer ſimplement cette valeur dans l'une ou l'autre des équations du §. 8; car, puiſque l'élément dt y eſt ſuppoſé conſtant, on ne gagneroit rien, parce que cette ſuppoſition y demeureroit toujours enveloppée. Pour cette raiſon il convient auparavant de délivrer les dites équa-

équations de cette condition, que l'élément du tems dt y eſt ſuppoſé conſtant. Pour cet effet, puiſque la formule $\frac{ddx}{dt}$ y eſt poſée pour $d.\frac{dx}{dt}$, en ne prenant aucun élément conſtant, au lieu de $\frac{ddx}{dt}$ il faut écrire $\frac{ddx}{dt} - \frac{dx\,ddt}{dt^2}$, d'où les équations du §. 8. ſeront exprimées ainſi:

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{dt^2} - \frac{dx\,ddt}{dt^3} = -\frac{A - B}{xx} + \frac{C}{yy} - \frac{C}{(x+y)^2}$$

$$\text{II.}\quad \frac{ddy}{dt^2} - \frac{dy\,ddt}{dt^3} = -\frac{B - C}{yy} + \frac{A}{xx} - \frac{A}{(x+y)^2},$$

où aucun différentiel n'eſt ſuppoſé conſtant.

15. De ces deux équations éliminons d'abord le ſecond différentiel ddt, pour avoir cette équation:

$$\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dt^2} = -\frac{(A+B)dy - A\,dx}{xx} + \frac{(B+C)dx - C\,dy}{yy} + \frac{A\,dx - C\,dy}{(x+y)^2},$$

où il eſt maintenant permis d'écrire, au lieu de dt^2, ſa valeur trouvée ci-deſſus, ce qui nous conduit à cette équation:

$$\frac{2(A+B+C)\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right)(dy\,ddx - dx\,ddy)}{A(B+C)dx^2 + 2AC\,dx\,dy + C(A+B)dy^2} =$$

$$-\frac{(A+B)dy - A\,dx}{xx} + \frac{(B+C)dx + C\,dy}{yy} + \frac{A\,dx - C\,dy}{(x+y)^2}.$$

Voilà donc une ſeule équation différentielle du ſecond degré entre les deux variables x & y, qui contient la ſolution de notre probleme, & tout

tout ſe réduit à la découverte d'une méthode par laquelle on puiſſe rendre cette équation intégrable.

16. Quelque compliquée que paroiſſe cette équation, je pourrois produire des exemples aſſez ſemblables, où l'intégration a réuſſi; je crois donc qu'on ne doit point déſeſpérer du ſuccès. On peut rendre cette équation plus ſimple, & la délivrer des différentiels du ſecond degré, en poſant $dx = p\,dy$, pour avoir $dy\,ddx - dx\,ddy = dy^2 dp$, & notre équation prendra cette forme:

$$\frac{2(A+B+C)\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right)dp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)}$$

$$+ \frac{A+B+Ap}{xx}dy - \frac{(B+C)p-C}{yy}dy + \frac{C-Ap}{(x+y)^2}dy = 0,$$

à laquelle ſatisfait, comme on le voit dabord, une certaine valeur conſtante priſe pour p. Car, ſuppoſant $p = n$, ou bien $x = ny$, on aura

$$\frac{A+B+An}{nn} - (B+C)n - C + \frac{C-An}{(n+1)^2} = 0,$$

d'où l'on tire le même cas d'intégrabilité que j'ai déjà développé ci-deſſus, où la valeur du nombre n doit être d'une équation du cinquieme degré.

17. Pour mieux approfondir la nature de cette équation, développons quelques cas dont la réſolution eſt déjà connue d'ailleurs, ce qui arrive lorſque la maſſe d'un des trois corps eſt preſque infinie par rapport aux autres, puiſqu'alors chacun des deux autres y eſt porté tout comme ſi l'autre n'exiſtoit point; de ſorte que ce cas doit revenir

Evolution du cas où B = ∞. à celui où il n'y auroit que deux corps. Suppoſons donc infinie la maſſe du corps B, & écrivant ΔB au lieu de Γ, nous aurons à réſoudre cette équation:

2 (Δ

$$\frac{2\left(\Delta+\frac{A}{x}+\frac{C}{y}\right)\mathrm{d}p}{App+C}+\frac{\mathrm{d}y}{xx}-\frac{p\,\mathrm{d}y}{yy}=0 \text{ (ayant posé } \mathrm{d}x=p\,\mathrm{d}y\text{)}$$

ce qui nous assure que l'intégration ne sauroit se refuser à nos recherches, quoique les méthodes ordinaires nous prêtent peu de secours pour y arriver. Je reviens donc à la méthode que j'ai expliquée autrefois, où il s'agit de trouver un multiplicateur qui rende cette équation intégrable.

18. Quelques circonstances me font juger qu'un tel multiplicateur pourroit être une fonction de la seule quantité p, qui soit $=P$, & partant cette équation intégrable:

$$\frac{2\left(\Delta+\frac{A}{x}+\frac{C}{y}\right)P\,\mathrm{d}p}{App+C}+\frac{P\,\mathrm{d}y}{xx}+\frac{Pp\,\mathrm{d}y}{yy}=0:$$

soit donc $2\int\frac{P\,\mathrm{d}p}{App+C}=Q$, aussi fonction de p, & le premier membre de l'intégrale sera $\left(\Delta+\frac{A}{x}+\frac{C}{y}\right)Q$. Soit donc l'équation intégrale entière

$$\left(\Delta+\frac{A}{x}+\frac{C}{y}\right)Q+V=0,$$

où il est évident que la partie V ne sauroit renfermer p, mais qu'elle est fonction des seules quantités x & y. De là nous aurons:

$$\frac{P\,\mathrm{d}y}{xx}-\frac{Pp\,\mathrm{d}y}{yy}=-\frac{AQp\,\mathrm{d}y}{xx}-\frac{CQ\,\mathrm{d}y}{yy}+\mathrm{d}V,$$

où $\mathrm{d}V=\frac{(P+AQp)\,\mathrm{d}y}{xx}+\frac{(CQ-Pp)\,\mathrm{d}y}{yy}$, & partant intégrable; ce qui ne sauroit arriver à moins qu'il ne fût $P+AQp$

 =

$= \alpha p$, & $CQ - Pp = \beta$, ou bien $dV = \frac{\alpha dx}{xx} + \frac{\beta dy}{yy}$,
& par conséquent

$$V = \gamma - \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y}.$$

19. Ces deux conditions nous fourniſſent:

$$Q = \frac{\alpha p - P}{Ap} = \frac{\beta + Pp}{C};$$

donc $(\alpha C - \beta A)p = P(App + C)$, & $P = \frac{(\alpha C - \beta A)p}{App + C}$;
par conſéquent $Q = \frac{\alpha pp + \beta}{App + C}$. Or il faut qu'il ſoit

$$Q = 2\int \frac{Pdp}{App + C}, \text{ ou bien } dQ = \frac{2Pdp}{App + C} = \frac{2(\alpha C - \beta A)p\,dp}{(App + C)^2},$$

ce qui étant préciſément d'accord avec la valeur de Q, l'équation intégrale cherchée ſera:

$$\left(\Delta + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right) \cdot \frac{\alpha pp + \beta}{App + C} + \gamma - \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{y} = 0,$$

ou bien

$$\Delta(\alpha pp + \beta) + \gamma(App + C) + \frac{\beta A - \alpha C}{x} + \frac{(\alpha C - \beta A)pp}{y} = 0$$

où les conſtantes α, β, γ, de même que Δ, peuvent être priſes à volonté, & partant l'intégrale aura cette forme:

$$E + Fpp + \frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = 0, \quad \text{où } \Delta = AE - CF.$$

20. Or, pour ce cas, ayant $\Gamma = \Delta B = B(AE - CF)$, l'élément du tems dt doit être déterminé par cette équation:

dt^2

$$dt^2 = \frac{A\,dx + C\,dy^2}{2B\left(AE - CF + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right)} = \frac{(App + C)\,dy^2}{2B\left(AE - CF + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right)};$$

mais l'équation trouvée donne

$$pp = \left(E + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{1}{y} - F\right);$$

cette valeur y étant ſubſtituée fournit celle-ci:

$$dt^2 = dy^2;\ 2B\left(\frac{1}{y} - F\right), \text{ ou } dt\sqrt{2B} = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(1 - Fy)}}.$$

Enſuite, puiſque $pp = \frac{dx^2}{dy^2}$, on aura:

$$\frac{x\,dx^2}{1 + Ex} = \frac{y\,dy^2}{1 - Fy} \text{ ou } \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1 + Ex)}} = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(1 - Fy)}} = dt\sqrt{2B},$$

d'où l'on voit clairement que l'un & l'autre des corps A & C ſuit le même mouvement vers le corps B, tout comme ſi l'autre n'exiſtoit point. De la même maniere, on développera les cas où la maſſe A, ou C, feroit preſque infiniment grande par rapport aux autres, de ſorte qu'il ſeroit ſuperflu d'en faire le calcul.

21. Eſſayons donc la même méthode pour intégrer l'équation générale du §. 16; pour cet effet multiplions-la par une fonction de p qui ſoit $= P$, pour avoir cette équation: *Eſſai pour l'intégration de l'équation générale.*

$$\frac{2(A + B + C)\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x + y}\right) P\,dp}{A(B + C)pp + 2ACp + C(A + B)}$$

$$+ \frac{(A + B + Ap)P\,dy}{xx} - \frac{(C + (B + C)p)P\,dy}{yy} + \frac{(C - Ap)P\,dy}{(x + y)^2} = 0,$$

que nous ſuppoſerons intégrable. Poſons l'intégrale

$$2(A + B + C)\int \frac{P\,dp}{A(B + C)pp + 2ACp + C(A + B)} = Q,$$

 &

& soit l'équation intégrale cherchée

$$\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right) Q + V = 0,$$

d'où nous aurons:

$$dV - \frac{ABQpdy}{xx} - \frac{BCQdy}{yy} - \frac{ACQ(1+p)dy}{(x+y)^2} =$$
$$\frac{(A+B+Ap)Pdy}{xx} - \frac{(C+(B+C)p)Pdy}{yy} + \frac{(C-Ap)Pdy}{(x+y)^2}.$$

22. Comme la lettre V ne sauroit renfermer p, posons

$$V = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{x+y} + \delta,$$

& nous aurons à remplir les conditions suivantes:

$$-\alpha p = (A + B + Ap)P + ABQp$$
$$-\beta = -(C + (B + C)p)P + BCQ$$
$$-\gamma(1+p) = (C - Ap)P + ACQ(1+p).$$

Eliminons-en Q, ce qui peut se faire en deux manieres:

$$(\beta A - \alpha C)p = (A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B))P$$
$$(\beta A - \gamma B)(1+p) = (A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B))P,$$

d'où l'on voit qu'on ne sauroit satisfaire à la fois à ces deux conditions, ce qui est une marque évidente, que cette méthode ne réussit point pour l'équation générale. Ou bien le multiplicateur qui la rend intégrable, n'est pas simplement une fonction de la quantité p.

23. Comme dans le cas $B = \infty$, l'intégrale a été réduite à cette forme: $E + Fpp + \frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = 0$, on pourroit penser que l'intégrale de notre équation générale auroit peut-être une telle forme:

$$\frac{1}{x+y} = \frac{P}{x} + \frac{Q}{y} + R,$$

où

où P, Q & R feroient de certaines fonctions de la quantité p. Mais, en fubſtituant pour $\frac{1}{x+y}$ cette valeur, & pour $\frac{dy}{(x+y)^2}$ celle-ci

$$\frac{Pp\,dy}{(1+p)xx} + \frac{Q\,dy}{(1+p)yy} - \frac{1}{1+p}\left(\frac{dP}{x} + \frac{dQ}{y} + dR\right),$$

on s'appercevra aiſément qu'il n'eſt pas poſſible de ſatisfaire à l'équation différentielle de cette maniere. D'où l'on peut conclure que l'intégrale ne ſauroit être exprimée d'une façon ſi ſimple, & que ſa forme ſera beaucoup plus compliquée & renfermera peut-être des quantités tranſcendantes.

24. En employant de cette ſorte la méthode des multiplicateurs on voit bien que ce n'eſt pas la conſtante Γ qui en empêche le ſuccès: cependant il n'y a aucun doute que, poſant cette conſtante $\Gamma = 0$, l'équation ne doive devenir beaucoup plus facile à réſoudre, & partant il ſera toujours très raiſonnable de commencer par ce cas, puiſque, tant qu'on ne trouve pas moyen de le réſoudre, on entreprendroit en vain la réſolution de l'équation générale. Poſons donc $\Gamma = 0$, pour avoir à réſoudre cette équation: *Conſidération du cas $\Gamma = 0$.*

$$\frac{2(A+B+C)\left(\frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y}\right)dp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)} + \frac{A+B+Ap}{xx}dy$$
$$- \frac{(B+C)p - C}{yy}dy + \frac{C - Ap}{(x+y)^2}dy = 0,$$

qui a cette belle propriété, que les deux variables x & y y rempliſſent partout le même nombre de dimenſions, ou bien que cette équation eſt du nombre de celles qu'on nomme homogenes.

25. Ayant déjà poſé $dx = p\,dy$, poſons outre cela $x = sy$, & puiſque $p\,dy = s\,dy + y\,ds$, nous en tirons $\frac{dy}{y} = \frac{ds}{p-s}$. Or l'équation elle-même à réſoudre prendra cette forme:

2 (A

$$\frac{2(A+B+C)\left(\frac{AB}{s}+BC+\frac{AC}{s+1}\right)dp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{A+B+Ap}{ss}\cdot\frac{dy}{y}$$
$$-(C+(B+C)p)\frac{dy}{y}+\frac{C-Ap}{(s+1)^2}\cdot\frac{dy}{y}=0,$$

où l'on n'a qu'à ſubſtituer pour $\frac{dy}{y}$ ſa valeur $\frac{ds}{p-s}$, pour obtenir une équation différentielle du premier degré entre les deux variables p & s, qui eſt:

$$\frac{2(A+B+C)\left(\frac{AB}{s}+BC+\frac{AC}{s+1}\right)dp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{ds}{p-s}\left(\frac{A+B+Ap}{ss}\right.$$
$$\left.-C-(B+C)p+\frac{C-Ap}{(s+1)^2}\right)=0;$$

& ſe réduit à cette forme:

$$\frac{2(A+B+C)s(s+1)(p-s)dp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{ds((A+B)(s+1)^2-Cs^3(s+2))+pds(A(2s+1)-(B+C)ss(s+1)^2)}{BCss+(AB+BC+AC)s+AB}=0.$$

26. Partageons cette équation dans les deux membres ſuivans:

$$\frac{2(A+B+C)pdp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{ds((A+B)(s+1)^2-Cs^3(s+2))}{s(s+1)(BCss+(AB+BC+AC)s+AB)}=$$
$$\frac{2(A+B+C)sdp}{A(B+C)pp+2ACp+C(A+B)}+\frac{pds((B+C)ss(s+1)^2-A(2s+1))}{s(s+1)(BCss+(AB+BC+AC)s+AB)},$$

dont le premier eſt intégrable de lui-même, & le dernier le devient en le diviſant par ps. Cette équation, quoique différentielle du premier degré, ſemble être aſſujettie à de plus grandes difficultés que la précédente du ſecond degré; puiſqu'ici même, dans le cas où l'on

l'on fait $B = \infty$, l'équation n'en devient presque point plus traitable. Car on aura bien :

$$\frac{2(p-s)\,dp}{App+C} + \frac{(1-pss)\,ds}{s(Cs+A)} = 0,$$

qui est certainement intégrable, quoique la route pour la résoudre paroisse fort cachée. Cependant on verra que cette valeur $s = \frac{1}{pp}$ y satisfait, ou en est une intégrale particuliere.

27. Mais c'est d'une maniere bien singuliere que nous connoissons l'intégrale de cette équation

$$\frac{2(p-s)\,dp}{App-C} + \frac{(1-pss)\,ds}{s(Cs+A)} = 0;$$

nous ne savons autre chose sinon que, posant $x = sy$ ou $s = \frac{x}{y}$, de sorte que $\frac{dy}{y} = \frac{ds}{p-s}$, on aura par le §. 19.

$$\frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = n(App+C) \text{ à cause de } AE - CF = 0,$$

& de là $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(1-nCx)}} = \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(1+nAy)}}$. Mais nous ne saurions développer de cette équation le rapport entre les quantités p & s. Voilà donc un exemple bien remarquable d'une équation différentielle dont nous connoissons la construction, quoiqu'une méthode directe pour l'en déduire nous semble manquer, de sorte qu'on ne sauroit douter de ce côté que l'analyse ne soit encore susceptible d'un progrès très considérable.

28. Il est bon d'observer aussi que, quoiqu'on suppose ou $A = 0$ ou $C = 0$, la résolution de cette équation ne se trouve pas dégagée de tout embarras. Car soit $A = 0$ pour avoir cette équation:

tion: $2p\,dp - 2s\,dp - p\,ds + \frac{ds}{ss} = 0$, dont la ſolution ne ſaute pas certainement d'abord aux yeux, quoiqu'on ſache que la valeur $pps = 1$ lui convienne. Cependant on arrivera au but en poſant $p = \frac{z}{\sqrt{s}}$, d'où l'on tire

$$\frac{2z\,dz}{s} + \frac{ds}{ss}(1 - zz) - 2\,dz\sqrt{s} = 0, \quad \text{ou bien}$$

$$\frac{ds}{ss\sqrt{s}} + \frac{2z\,dz}{(1-zz)s\sqrt{s}} = \frac{2\,dz}{1-zz},$$ qui étant multipliée par $(1-zz)^{\frac{3}{2}}$ donne l'intégrale $-\frac{2}{3}s^{-\frac{3}{2}}(1-zz)^{\frac{3}{2}} = 2\int dz\sqrt{(1-zz)}$, ou

$$s^{\frac{3}{2}} = \frac{-(1-zz)\sqrt{(1-zz)}}{3\int dz\sqrt{(1-zz)}}, \;\&\; \sqrt{s} = \frac{-\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt[3]{3\int dz\sqrt{(1-zz)}}},$$

$$\& \quad p = \frac{-2\sqrt[3]{3\int dz\sqrt{(1-zz)}}}{\sqrt{(1-zz)}}.$$

De là, à cauſe de $\frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = \text{Conſt.}$ ou $\frac{1}{y}\left(\frac{1}{s} - pp\right) = \alpha$, on aura $y = \frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{(3\int dz\sqrt{(1-zz)})^2}$, & $x = sy = \frac{1-zz}{\alpha}$.

29. A cauſe de cet embarras, nonobſtant que la choſe en elle-même ſoit fort aiſée, je conclus qu'il ne convient en aucune maniere de conduire la ſolution de notre probleme de la façon que je viens de faire. Soit que la conſtante Γ évanouiſſe ou non, il n'eſt jamais à propos de poſer $x = sy$, & d'introduire cette quantité s dans le calcul; auſſi, pour peu qu'on réfléchiſſe ſur la nature de la queſtion, on verra que les deux diſtances x & y ſont trop peu liées entr'elles pour qu'on puiſſe faire entrer leur rapport dans le calcul. Chacune de ces diſtances eſt plutôt immédiatement liée avec le tems t, & par cette raiſon je ne

ne sais pas si l'on ne feroit pas beaucoup mieux de ne point bannir du calcul l'élément du tems d*t*. Il est vrai qu'on ne voit pas alors comment on pourroit parvenir à une solution; mais c'est principalement aux Géometres à employer tous leurs efforts pour trouver une autre route, qui conduise à la solution du probleme.

30. On voit par-là qu'on est encore bien éloigné de la solution du cas le plus simple du probleme des trois corps, qui a lieu sans doute lorsque leur mouvement se fait sur la même ligne droite; & partant à plus forte raison il s'en faut beaucoup qu'on soit déjà arrivé à une solution parfaite de ce grand probleme. On comprend plutôt qu'on est encore à peine avancé au delà du premier pas. Ce premier pas renferme quelques propriétés générales, qui conviennent non seulement au mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, mais qui ont également lieu, quelque grand que soit le nombre des corps. Comme il est très important de connoitre ces propriétés générales, quoiqu'elles ne suffisent pas à la détermination du mouvement, dès que le nombre des corps va au delà de deux, je vai les déduire des premieres formules que les principes mécaniques nous fournissent, afin qu'on voie clairement jusqu'à quel point on est déjà avancé dans ces recherches.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement, quelque grand que soit leur nombre.

31. Considérons quatre corps, dont les masses soient A, B, C, D, & qui se trouvent à présent aux points A, B, C, D représentés dans la Figure; & qui par leur mouvement soient transportés en *a*, *b*, *c*, *d* pendant l'élément du tems d*t*, en parcourant les espaces infiniment petits A*a*, B*b*, C*c*, D*d*. Or, en vertu de l'attraction mutuelle, le corps A est poussé à la fois par les forces accélératrices suivantes: Fig

selon $AB = \frac{B}{AB^2}$; selon $AC = \frac{C}{AC^2}$; selon $AD = \frac{D}{AD^2}$,

& de la même maniere chacun des autres corps est sollicité par trois semblables forces accélératrices. Ce que je dis ici de quatre corps s'appliquera sans aucune difficulté aux cas où le nombre des corps seroit ou plus grand ou plus petit; aussi n'envisagé-je point ces quatre corps comme existans dans un même plan, pour rendre ces recherches aussi générales qu'il est possible.

32. Quel que puisse être le mouvement de ces quatre corps, je le rapporte à un point fixe O, pris à volonté dans l'espace absolu, par lequel je fais passer trois lignes droites, pareillement fixes, OL, OM, ON, perpendiculaires entr'elles, pour représenter par-là trois plans fixes LOM, LON & MON, & y rapporter les lieux de nos corps à chaque instant; ce qui se fait pour chaque corps par trois coordonnées paralleles aux trois directions fixes OL, OM & ON. Nommons donc ces coordonnées

pour le corps A - - $OX = x$; $XY = y$; $YA = z$
pour le corps B - - $OX' = x'$; $X'Y' = y'$; $Y'B = z'$
pour le corps C - - $OX'' = x''$; $X''Y'' = y''$; $Y''C = z''$
pour le corps D - - $OX''' = x'''$; $X'''Y''' = y'''$; $Y'''D = z'''$.

Soient de plus les espaces infiniment petits parcourus dans l'élément du tems dt, $Aa = ds$; $Bb = ds'$; $Cc = ds''$; $Dd = ds'''$.

33. Cela posé, il est clair dabord qu'on aura

$$ds\,dds = dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz = \tfrac{1}{2}d.Aa^2$$
$$ds'\,dds' = dx'\,ddx' + dy'\,ddy' + dz'\,ddz' = \tfrac{1}{2}d.Bb^2$$
$$ds''\,dds'' = dx''\,ddx'' + dy''\,ddy'' + dz''\,ddz'' = \tfrac{1}{2}d.Cc^2$$
$$ds'''\,dds''' = dx'''\,ddx''' + dy'''\,ddy''' + dz'''\,ddz''' = \tfrac{1}{2}d.Dd^2.$$

Ensuite les distances entre les corps seront déterminées par les formules suivantes:

$$AB^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$
$$AC^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$$
$$AD^2 = (x''' - x)^2 + (y''' - y)^2 + (z''' - z)^2$$
$$BC^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$$
$$BD^2 = (x''' - x')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2$$
$$CD^2 = (x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2,$$

d'où l'on tire les différentiels de ces distances:

$$d.AB = \frac{(x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)+(z'-z)(dz'-dz)}{AB},$$

& pareillement les autres.

34. Considérons d'abord la force accélératrice $\frac{B}{AB^2}$, dont le corps A est attiré par le corps B selon la direction AB, & décomposant cette force selon les trois directions fixes OL, OM, ON, on trouvera que le corps A est sollicité selon ces directions par les forces accélératrices suivantes,

selon OL, $= \frac{B(x'-x)}{AB^3}$; selon OM, $= \frac{B(y'-y)}{AB^3}$; selon ON, $= \frac{B(z'-z)}{AB^3}$.

On n'a qu'à y ajouter les forces, selon les mêmes directions, qui résultent de l'attraction des autres corps, exercées sur le corps A, pour avoir toutes les forces qui y agissent. Ensuite on fera la même chose pour chacun des autres corps; & les principes du mouvement fourniront autant d'équations qu'il y a de forces qui agissent sur chaque corps.

35. De là, prenant constant l'élément du tems dt, on tirera les équations suivantes:

$$\text{I.}\quad \frac{ddx}{dt^2} = \frac{B(x' - x)}{AB^3} + \frac{C(x'' - x)}{AC^3} + \frac{D(x''' - x)}{AD^3}$$

$$\text{II.}\quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{B(y' - y)}{AB^3} + \frac{C(y'' - y)}{AC^3} + \frac{D(y''' - y)}{AD^3}$$

$$\text{III.}\quad \frac{ddz}{dt^2} = \frac{B(z' - z)}{AB^3} + \frac{C(z'' - z)}{AC^3} + \frac{D(z''' - z)}{AD^3}$$

pour le corps A.

$$\text{IV.}\quad \frac{ddx'}{dt^2} = \frac{C(x'' - x')}{BC^3} + \frac{D(x''' - x')}{BD^3} + \frac{A(x - x')}{BA^3}$$

$$\text{V.}\quad \frac{ddy'}{dt^2} = \frac{C(y'' - y')}{BC^3} + \frac{D(y''' - y')}{BD^3} + \frac{A(y - y')}{BA^3}$$

$$\text{VI.}\quad \frac{ddz'}{dt^2} = \frac{C(z'' - z')}{BC^3} + \frac{D(z''' - z')}{BD^3} + \frac{A(z - z')}{AB^3}$$

pour le corps B.

$$\text{VII.}\quad \frac{ddx''}{dt^2} = \frac{D(x''' - x'')}{CD^3} + \frac{A(x - x'')}{CA^3} + \frac{B(x' - x'')}{CB^3}$$

$$\text{VIII.}\quad \frac{ddy''}{dt^2} = \frac{D(y''' - y'')}{CD^3} + \frac{A(y - y'')}{CA^3} + \frac{B(y' - y'')}{CB^3}$$

$$\text{IX.}\quad \frac{ddz''}{dt^2} = \frac{D(z''' - z'')}{CD^3} + \frac{A(z - z'')}{CA^3} + \frac{B(z' - z'')}{CB^3}$$

pour le corps C.

$$\text{X.}\quad \frac{ddx'''}{dt^2} = \frac{A(x - x''')}{DA^3} + \frac{B(x' - x''')}{DB^3} + \frac{C(x'' - x''')}{DC^3}$$

$$\text{XI.}\quad \frac{ddy'''}{dt^2} = \frac{A(y - y''')}{DA^3} + \frac{B(y' - y''')}{DB^3} + \frac{C(y'' - y''')}{DC^3}$$

$$\text{XII.}\quad \frac{ddz'''}{dt^2} = \frac{A(z - z''')}{DA^3} + \frac{B(z' - z''')}{DB^3} + \frac{C(z'' - z''')}{DC^3}$$

pour le corps D.

Voilà donc douze équations par lesquelles le mouvement de tous les quatre corps est déterminé, d'où l'on voit que pour tout autre nombre de corps on auroit toujours trois fois autant d'équations, ayant outre le tems t autant de quantités inconnues & variables.

36. Comme aucune de ces équations n'est intégrable, tout revient à en former, par certaines combinaisons, de nouvelles équations qui admettent l'intégration, & si l'on en pouvoit tirer douze équations de cette nature, le probleme seroit parfaitement résolu. Mais il s'en faut beaucoup qu'on puisse pousser la solution à ce point de perfection: & il faut bien se contenter du nombre d'équations intégrales que les méthodes connues peuvent fournir. Or d'abord des équations I, IV, VII, X on tirera celle-ci:

$$\frac{A\,ddx + B\,ddx' + C\,ddx'' + D\,ddx'''}{dt^2} = 0,$$

où les autres membres se détruisent tous mutuellement. Cette équation donne donc par l'intégration:

$$A\,dx + B\,dx' + C\,dx'' + D\,dx''' = \alpha\,dt,$$

& ensuite: $Ax + Bx' + Cx'' + Dx''' = \alpha t + \mathfrak{A}$,

laquelle équation renferme un très beau rapport entre les coordonnées paralleles à la direction OL.

37. La même chose réussit pour les coordonnées paralleles aux deux autres directions OM & ON, de sorte que nous aurons en tout d'abord ces trois formules différentielles du premier degré:

$$A\,dx + B\,dx' + C\,dx'' + D\,dx''' = \alpha\,dt$$
$$A\,dy + B\,dy' + C\,dy'' + D\,dy''' = \beta\,dt$$
$$A\,dz + B\,dz' + C\,dz'' + D\,dz''' = \gamma\,dt.$$

&

& de là ces trois formules algébriques:

$$A x + B x' + C x'' + D x''' = \alpha t + \mathfrak{A}$$

$$A y + B y' + C y'' + D y''' = \beta t + \mathfrak{B}$$

$$A z + B z' + C z'' + D z''' = \gamma t + \mathfrak{C},$$

qui nous donnent à connoitre que le commun centre d'inertie des quatre corps se meut uniformément suivant chacune des trois directions OL, OM, ON, & partant que son mouvement se fait uniformément sur une ligne droite, comme on le sait déjà depuis longtems.

28. Formons maintenant les équations suivantes:

$$\frac{y\,ddx - x\,ddy}{dt^2} = \frac{B(x'y - y'x)}{AB^3} + \frac{C(x''y - y''x)}{AC^3} + \frac{D(x'''y - y'''x)}{AD^3}$$

$$\frac{y'ddx' - x'ddy'}{dt^2} = \frac{C(x''y' - y''x')}{BC^3} + \frac{D(x'''y' - y'''x')}{BD^3} + \frac{A(xy' - yx')}{BA^3}$$

$$\frac{y''ddx'' - x''ddy''}{dt^2} = \frac{D(x'''y'' - y'''x'')}{CD^3} + \frac{A(xy'' - yx'')}{CA^3} + \frac{B(x'y'' - y'x'')}{CB^3}$$

$$\frac{y'''dx''' - x'''dy'''}{dt^2} = \frac{A(xy''' - xy''')}{DA^3} + \frac{B(x'y''' - y'x''')}{DB^3} + \frac{C(x''y''' - y''x''')}{DC^3},$$

où l'on pourra faire encore en sorte que les derniers membres se détruisent tous entr'eux, & il en résultera cette équation intégrable:

$$\frac{A(y\,ddx - x\,ddy)}{dt^2} + \frac{B(y'ddx' - x'ddy')}{dt^2} + \frac{C(y''ddx'' - x''ddy''}{dt^2} + \frac{D(y'''ddx''' - x'''ddy''')}{dt^2} = 0.$$

39. De cette maniere on obtiendra encore trois équations intégrales, qui seront:

A(ydx

$$A(ydx - xdy) + B(y'dx' - x'dy') + C(y''dx'' - x''dy'') + D(y'''dx''' - x'''dy''') = \delta dt$$

$$A(zdy - ydz) + B(z'dy' - y'dz') + C(z''dy'' - y''dz'') + D(z'''dy''' - y'''dz''') = \epsilon dt$$

$$A(xdz - zdx) + B(x'dz' - z'dx') + C(x''dz'' - z''dx'') + D(x'''dz''' - z'''dx''') = \zeta dt,$$

dont les intégrales peuvent encore être représentées par les aires des projections faites sur les trois plans fixes LOM, MON & NOL, de la route que chaque corps décrit, ces aires étant terminées par l'arc de chaque projection décrit dans le tems t, & les deux rayons vecteurs tirés au point O. Quelque plan donc qu'on prenne pour y faire ces projections, on multiplie chaque aire indiquée par la masse du corps auquel elle appartient, & la somme de tous ces produits est toujours proportionelle au tems pendant lequel ces aires ont été décrites. Cette propriété générale est analogue à celle que *Newton* a démontrée pour le mouvement d'un corps qui est sollicité vers un point fixe.

40. Cette propriété devient encore infiniment plus générale en considérant que, tant le point O, que la position des plans, dépend entierement de notre bon plaisir: d'où nous tirons le Théoreme suivant:

Quelque grand que soit le nombre des corps qui s'attirent mutuellement, & de quelque mouvement qu'ils soient portés, quand on décrit sur un plan quelconque les projections orthogonales des courbes que les corps décrivent, & qu'on en prend les aires décrites autour d'un point pris à volonté sur ce plan pour un tems quelconque, en multipliant chacune de ces aires par la masse du corps auquel elle convient, la somme de tous ces produits sera proportionelle au tems.

Ce beau Théoreme a lieu non seulement quand les corps s'attirent mutuellement en raison réciproque du quarré des distances, mais aussi quand l'attraction suit toute autre raison des distances: pourvu qu'à

 distan-

diſtances égales l'attraction ſoit proportionelle à la maſſe du corps attirant.

41. Voilà donc déjà ſix équations intégrales pour un nombre quelconque de corps qui s'attirent mutuellement: mais on peut encore en trouver une ſeptieme de la maniere ſuivante. Puiſque $dxddx + dyddy + dzddz = dsdds = \frac{1}{2}d.Aa^2$, on verra qu'en aſſemblant des équations du §. 35. la valeur de la formule $\frac{Adsdds + Bds'dds' + Cds''dds'' + Dds'''dds'''}{dt^2}$, les parties qui ont AB^3 pour dénominateur produiront cette forme:

$$\frac{A.B}{AB^3}.\left[-(x'-x)(dx'-dx)-(y'-y)(dy'-dy)-(z'-z)(dz'-dz)\right],$$

qui par le §. 33 ſe changera en celle-ci:

$$\frac{A.B}{AB^3}\left(-AB.d.AB\right) = \frac{-A.B.d.AB}{AB^2} = A.Bd.\frac{1}{AB};$$

dont l'intégrale eſt par conſéquent $= \frac{A.B}{AB}$, où le numérateur eſt le produit des deux maſſes A & B, & le dénominateur leur diſtance AB.

42. Comme l'intégration réuſſit pareillement dans les autres parties diviſées par AC^3, AD^3, BC^3, BD^3, CD^3, en introduiſant une conſtante arbitraire Δ, on obtiendra cette équation intégrale renfermant les eſpaces élémentaires Aa, Bb, Cc, Dd, parcourus dans le tems infiniment petit dt:

$$\frac{A.Aa^2 + B.Bb^2 + C.Cc^2 + D.Dd^2}{2dt^2} =$$

$$\Delta + \frac{A.B}{AB} + \frac{A.C}{AC} + \frac{A.D}{AD} + \frac{B.C}{BC} + \frac{B.D}{BD} + \frac{C.D}{CD},$$

où

où il faut remarquer que, dans le premier membre, $\frac{Aa}{dt}$ exprime la viteſſe du corps A; $\frac{Bb}{dt}$ celle du corps B; $\frac{Cc}{dt}$ celle du corps C, & $\frac{Dd}{dt}$ celle du corps D; de ſorte que le premier membre tout entier repréſente la ſomme des forces vives de tous les corps enſemble.

43. On obſervera donc que la force vive totale de tous les corps qui agiſſent les uns ſur les autres par leurs forces attractives, eſt toujours proportionelle à une expreſſion compoſée d'une quantité conſtante Δ, & d'autres termes, dont chacun eſt le produit des maſſes de deux corps diviſés par leur diſtances: il y aura donc autant de tels termes, qu'il y a de combinaiſons de deux à deux des corps propoſés, de ſorte que ſi en général le nombre des corps eſt $= n$, le nombre de ces termes ſera $= \frac{nnn}{2}$; qui dans le cas de quatre corps eſt donc $= 6$, comme on voit par l'expreſſion trouvée. Pour la quantité conſtante Δ, on voit bien qu'elle dépend de l'état primitif imprimé aux corps. Enſuite on voit auſſi en général que, plus les corps s'approchent entr'eux, plus la ſomme de leurs forces vives doit devenir grande. Or, au contraire, à meſure que les corps s'éloignent entr'eux, la ſomme de leurs forces vives diminuera.

44. Voilà donc en tout ſept équations intégrales qu'on a pu découvrir juſqu'ici en général, quelque grand que ſoit le nombre des corps. Pour le cas de deux corps, où l'on n'a que 6 équations principales, il ſemble qu'on pourroit ſe paſſer de la ſeptieme équation intégrale, & que les ſix premieres devroient ſuffire pour déterminer le mouvement; mais alors il arrive que ces ſix ne renferment que cinq déterminations, & que la ſixieme devient identique, de ſorte qu'on eſt obligé de ſe ſervir principalement de la ſeptieme pour réſoudre le probleme. La choſe eſt auſſi fort claire d'elle-même; car, puiſque les ſix premieres équations intégrales auroient également lieu quand même

l'attraction ne ſuivroit pas la raiſon inverſe quarrée des diſtances, il eſt évident qu'elles ne ſauroient jamais être ſuffiſantes pour procurer une ſolution.

45. Mais, dès qu'il eſt queſtion de trois corps, dont le mouvement eſt déterminé par 9 équations, les ſept équations intégrales que je viens de trouver ne ſuffiſent plus pour en tirer une ſolution parfaite; il faudroit encore au moins en découvrir deux nouvelles, auxquelles on n'a pu encore parvenir, malgré tous les ſoins que les plus grands Géometres ſe ſont donnés. La méthode dont je me ſuis ſervi ici, en cherchant certaines combinaiſons entre les équations principales détaillées dans le §. 35, qui conduiſent à quelque équation intégrable, ſemble entierement épuiſée, & il faudra ſans doute chercher une route tout à fait nouvelle. Dans l'état où l'Analyſe ſe trouve, il ſemble même impoſſible de dire ſi l'on en eſt encore fort éloigné ou non; mais il eſt bien certain que, dès qu'on ſera arrivé à ce point, l'Analyſe en retirera de beaucoup plus grands avantages, que l'Aſtronomie ne ſauroit s'en promettre, à cauſe de la grande complication dont tous les élémens ſeront entrelacés ſelon toute apparence, de ſorte que pour la pratique on ne pourra preſque en eſpérer aucun ſecours.



NOU-

Fig. 1.

E A B C F

M N

b B c C

a A d D

Y Y' Y'' Y'''

Fig. 2.

O X X' X'' X''' L

Z

Fig. 3.

Y S

A X R B